

# Forme exponentielle des nombres complexes et transformations

**Exercice 1 :** 1) Ecrire sous forme algébrique :  $2e^{i\pi/2}$  ;  $\sqrt{2}e^{-i\pi/4}$  ;  $4e^{4i\pi/3}$  ;  $e^{-i\pi/6}$ .

2) Ecrire sous forme exponentielle : 20 ; -7 ; 7i ;  $\frac{-i}{\sqrt{2}}$  ;  $3 - 3i$  ;

3) Ecrire sous forme exponentielle :  $u = 5(\cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7})$  ;  $v = -e^{i\pi/4}$  ;  $w = (\sqrt{3} - 2)e^{7i\pi/12}$  ;

4) On donne  $u = e^{i\pi/6}$  ,  $v = 3e^{-i\pi/3}$  ,  $w = \sqrt{2}e^{-5i\pi/6}$ .

Donner la forme exponentielle, puis la forme algébrique de :  $uvw$ ,  $\frac{u}{vw}$ ,  $v^2$ ,  $w^6$ .

**Dans la suite, on se place dans le plan muni d'un repère orthonormé direct (O ;  $\vec{u}$  ,  $\vec{v}$ )**

**Exercice 2 :** 1) Soit M d'affixe z. Placer les points N, P, Q d'affixes respectives iz, i<sup>2</sup>z, i<sup>3</sup>z.

2) Soit r la rotation de centre O et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ . Démontrer que N = r(M), P = r(N) et Q = r(P).

3) En déduire que MNPQ est un carré de centre O.

**Exercice 3 :** A tout point M(z) on associe le point M'(z').

Identifier les transformations géométriques qui à M associe M' dans les cas suivants :

a)  $z' = z + 1 - 2i$  ;      b)  $z' = -iz + 1 - 2i$  ;      c)  $z' = 3z + 1 + 2i$

**Exercice 4 :** Soit h l'homothétie de centre A(-3 + 2i) et de rapport 4 et t la translation de vecteur  $\vec{K}$  (3 - i).

1) Déterminer l'écriture complexe de h et t.

2) On note z l'affixe de M, z' l'affixe de M' = h(M) et z'' celle de M'' où M'' = t(M').

a) Exprimer z'' en fonction de z.

b) En déduire que la transformation qui à tout point M du plan associe M'' est une homothétie. Déterminer son centre et son rapport.

**Exercice 5 :** On considère les points A, B, C et P d'affixes  $z_A = \frac{3}{2} + 6i$ ,  $z_B = \frac{3}{2} - 6i$ ,  $z_C = -3 - \frac{1}{4}i$ ,  $z_P = 3 + 2i$ , et le vecteur  $\vec{K}$  d'affixe  $-1 + \frac{5}{2}i$ .

1) Déterminer l'affixe  $z_Q$  du point Q image de B par la translation t de vecteur  $\vec{K}$ .

2) Déterminer l'affixe  $z_R$  du point R image de P par l'homothétie h de centre C et de rapport  $-\frac{1}{3}$ .

3) Déterminer l'affixe  $z_S$  du point S image de P par la rotation de centre A et d'angle  $-\frac{\pi}{2}$ .

4) Placer les points P, Q, R et S.

5) Démontrer que le quadrilatère PQRS est un parallélogramme.

6) Calculer  $\frac{z_R - z_Q}{z_P - z_Q}$ .

7) En déduire la nature précise du quadrilatère PQRS.

**Exercice 6 :** Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Préciser laquelle et justifier votre choix. On pose  $z = -\sqrt{2 + \sqrt{2}} + i\sqrt{2 - \sqrt{2}}$ .

- 1) La forme algébrique de  $z^2$  est : a)  $2\sqrt{2}$  ; b)  $2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}$  ; c)  $2 + \sqrt{2} + i(2 - \sqrt{2})$  ; d)  $2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}$
- 2) La forme exponentielle de  $z^2$  est : a)  $4e^{i\pi/4}$  ; b)  $4e^{-i\pi/4}$  ; c)  $4e^{3i\pi/4}$  ; d)  $4e^{-3i\pi/4}$
- 3) La forme exponentielle de  $z$  est : a)  $2e^{7i\pi/8}$  ; b)  $2e^{i\pi/8}$  ; c)  $2e^{5i\pi/8}$  ; d)  $2e^{3i\pi/8}$
- 4)  $\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$  et  $\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$  sont les cosinus et sinus de : a)  $\frac{7\pi}{8}$  ; b)  $\frac{5\pi}{8}$  ; c)  $\frac{3\pi}{8}$  ; d)  $\frac{\pi}{8}$

**Exercice 7 :** On fera une figure que l'on complétera au fur et à mesure des questions.

On considère les points A, B, S et  $\Omega$  d'affixes respectives :

$$a = -2+4i, b = -4+2i, s = -5+5i \text{ et } \omega = -2+2i.$$

Soit  $h$  l'homothétie de centre S et de rapport 3.

On appelle C l'image du point A par  $h$  et D l'image du point B par  $h$ .

- 1) a) Déterminer l'écriture complexe de  $h$ .  
b) Démontrer que le point C a pour affixe  $c = 4+2i$  et que le point D a pour affixe  $d = -2-4i$ .
- 2) Démontrer que A, B, C et D sont sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.
- 3) Démontrer que la droite  $(S, \Omega)$  est la médiatrice du segment [AB].
- 4) Soit P le milieu du segment [AC].  
a) Déterminer l'affixe  $p$  du point P.  
b) Démontrer que  $\frac{\omega - p}{d - b} = -\frac{1}{2}i$ . En déduire une mesure de l'angle  $(\overline{BD} ; \overline{P\Omega})$ .
- 5) Soit Q le milieu du segment [BD]. Que représente le point  $\Omega$  pour le triangle PQS ?

**Exercice 8 :** A tout point M d'affixe  $z$  non nulle, on associe le point M' d'affixe  $z'$  tel que  $z' = \frac{-1}{z}$ .

- 1) a) Déterminer une relation entre les arguments de  $z$  et  $z'$ .  
b) En déduire que les points O, M, M' sont alignés.
- 2) Démontrer que  $z' + 1 = \frac{1}{z}(\bar{z} - 1)$ .
- 3) On nomme A et B les points d'affixes 1 et -1.  
On nomme  $\Gamma$  le cercle de centre A passant par O et par  $\Gamma^*$  le cercle  $\Gamma$  privé du point O.  
On suppose dans cette question que le point M appartient à  $\Gamma^*$ .  
a) Montrer que  $|z - 1| = 1$ .  
Démontrer que  $|z' + 1| = |z'|$  et interpréter géométriquement cette égalité.  
b) Déduire de ce qui précède une construction géométrique du point M' à partir du point M.
- 4) On suppose dans cette question que le point M appartient au cercle C de diamètre [AB].  
Démontrer que M' appartient à C et construire M'.