

TD n°8 : Nombres complexes et applications

Exercice n°1 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{C} - \{2i\}$ par $f(z) = \frac{z+i}{z-2i}$.

1°) Calculer $f(i)$ et $f(2-i)$.

2°) En posant $z = x + iy$, calculer la partie réelle et la partie imaginaire de $f(z)$.

3°) Déterminer l'ensemble des points d'affixe z tels que $f(z)$ est réel ;

Exercice n°2 : 1°) Résoudre dans \mathbb{C} les équations $3z^2 + z + 4 = 0$ et $z^2 + 2z + 2 = 0$.

2°) Résoudre dans \mathbb{C} les équations $z^2 = 2 - 2i\sqrt{3}$ et $z^2 = -5 - 12i$.

Exercice n°3 : 1°) Linéariser $\cos^2(x) \sin^2(x)$ et calculer $\int_0^\pi \cos^2(x) \sin^2(x) dx$.

2°) Linéariser $\cos^3(x) \sin(x)$ et calculer $\int_0^\pi \cos^3(x) \sin(x) dx$.

Exercice n°4 : 1°) Déterminer l'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que $z = 2 + j\omega$ où ω varie dans l'intervalle $]0 ; +\infty[$ et $j = e^{j\frac{\pi}{2}}$.

2°) Déterminer l'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que $z = 1 - j\frac{L}{C\omega}$ où L et C sont deux constantes réelles strictement positives, ω varie dans $]0 ; +\infty[$ et $j = e^{j\frac{\pi}{2}}$.

3°) Déterminer l'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que $|z + 3 - i| = 2$.

4°) Déterminer l'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que $\arg(z - (2 - i)) = \frac{\pi}{3}$.

Exercice n°5 : On pose $H(\omega) = \frac{2 + j\omega}{1 - j\omega}$ pour $\omega \in]0 ; +\infty[$.

1°) Exprimer le module $r(\omega)$ de $H(\omega)$ en fonction de ω .

2°) Exprimer un argument $\varphi(\omega)$ de $H(\omega)$ en fonction de ω .

3°) Etudier les fonctions r et φ sur $]0 ; +\infty[$.

Exercice n°6 : 1°) Déterminer les transformations du plan associée à :

$$\text{a) } f_1 : z \mapsto z+1-i ; \quad \text{b) } f_2 : z \mapsto 2z+i ; \quad \text{c) } f_3 : z \mapsto iz+1+2i .$$

2°) Représenter l'image de la droite d d'équation $x = 1$ par chacune de ces transformations.

Exercice n°7 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{C} - \{-1\}$ par $f(z) = \frac{(1+i)z}{z+1}$.

1°) Montrer que $f(z)$ peut se mettre sous la forme $f(z) = a + \frac{b}{z+1}$.

2°) En déduire que la transformation T associée à f est la composée de transformations connues (translation, rotation, homothétie, inversion ...)

3°) Représenter l'image J' du points J d'affixe 1 par la transformation T .

4°) Retrouver le résultat précédent par le calcul.

5°) Résoudre l'équation $f(z) = z$. Interpréter géométriquement le résultat.

Exercice n°8 : La fonction de transfert d'un filtre, en régime harmonique, peut s'écrire :

$$T(\omega) = \alpha \frac{1+ja\omega}{1+jb\omega} \text{ où } \alpha = \frac{R_2}{R_1+R_2}, \quad a = R_1C, \quad b = \alpha a, \quad \omega > 0 \text{ et } 0 < \alpha < 1.$$

1°) Montrer que, pour tout $\omega > 0$: $T(\omega) = \alpha + (1-\alpha) \frac{1}{1-j\frac{1}{b\omega}}$.

2°) a) Dans le plan P muni d'un repère orthonormal, l'ensemble des points m d'affixe $z = 1 + j\frac{1}{b\omega}$ est noté Δ .

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{C} - \{0\}$ par : $f(z) = \alpha + (1-\alpha) \frac{1}{z}$.

F est la transformation ponctuelle du plan P privé de l'origine O dans le plan P , qui à m d'affixe z associe M d'affixe $f(z)$.

On note C l'ensemble des points M images des points m de Δ par la transformation F .

Décrire une construction géométrique d'un point M à partir d'un point m de Δ .

b) Montrer à partir de cette construction que lorsque m décrit Δ , M décrit une partie d'un cercle dont on précisera le diamètre.